

ANALISIS STRUKTUR DENGAN

CARA MATRIKS

Jakarta, 23-9-2013

Ally

K. Halimah Tunafiah, 1

I. ALJABAR MATRIKS

1.1. Pendahuluan

Dengan adanya kemajuan yang cukup pesat dalam bidang elektronika, khususnya bidang komputer, maka proses hitungan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan banyak menggunakan cara aljabar matriks. Yang disebut matriks dalam hal ini adalah suatu rangkaian unsur yang disusun dalam baris dan kolom. Bila susunan itu terdiri dari atas m baris dan n kolom, disebut matriks $m \times n$. Bila m dan n sama besar, disebut matriks bujur sangkar (*square matrix*). Secara umum suatu matriks $m \times n$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Suatu unsur matriks dengan simbol a_{ij} berarti unsur tersebut berada pada baris i dan kolom j .

1.2 Type matriks.

1.2.1 Matriks baris.

Suatu matriks yang hanya terdiri atas satu baris disebut matriks baris (*row matrix*). Cara penulisan baris tersebut biasanya digunakan sepasang kurung kait, sebagai contoh :

$$[A] = [a_1 \ a_2 \ a_3] \quad (1.2)$$

1.2.2. Matriks kolom.

Suatu matriks yang hanya terdiri atas satu kolom disebut matriks kolom (column matrix). Cara penulisan pada umumnya seperti nampak pada contoh sbb:

$$\{ A \} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

1.2.3. Matriks bujur sangkar.

Matriks $m \times n$ dikatakan matriks bujur sangkar apabila $m = n$

Contoh : $[A] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 10 & 2 & 3 \\ 15 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad (1.4)$

1.2.4. Matriks simetri.

Matriks simetri adalah matriks bujur sangkar bila unsur-unsurnya simetri terhadap diagonal.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

1.2.5. Matriks diagonal.

Matriks diagonal adalah suatu matriks dengan unsur-unsurnya nol kecuali unsur-unsur diagonalnya.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

1.2.6. Matriks Satuan.

Matriks satuan adalah matriks diagonal dengan semua unsur diagonalnya bernilai satu.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

1.2.7. "Band Matriks".

Band Matriks ialah suatu matriks bujur sangkar dengan unsur-unsur di dekat diagonalnya tidak sama dengan nol.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

1.3. Operasi aljabar matriks.

1.3.1. Penambahan dan pengurangan matriks.

Proses penambahan dan pengurangan matriks hanya dapat berlangsung bila ukuran matriks tersebut sama besar. Penjumlahan dan pengurangan dua matriks dilakukan dengan menambahkan/mengurangi unsur-unsur matriks yang sesuai.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Sifat penjumlahan/pengurangan adalah kedua matriks yang dijumlahkan/dikurangkan dapat ditukar letaknya.

Contoh :

$$[A] + [B] = [B] + [A] \quad (1.9)$$

1.3.2. Perkalian matriks dengan sebuah bilangan.

Perkalian antara sebuah matriks dengan suatu bilangan (misal) adalah sama dengan perkalian atas unsur-unsur matriks tersebut dengan bilangan itu. Dan letak antara keduanya bisa diatur.

Contoh :

$$a[A] = [A]a \quad (1.10)$$

Jika $[A] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

maka $[A] = \begin{bmatrix} a.4 & a.1 & a.2 \\ a.5 & a.6 & a.8 \end{bmatrix}$

Bila $a = 2$, maka $a[A] =$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 10 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

1.3.3 Perkalian matriks dengan matriks.

Suatu matriks dapat dikalikan dengan matriks lain dengan sifat dan syarat perkalian sebagai berikut :

1. Perkalian matriks A dengan matriks B tidak sama dengan perkalian matriks B dengan matriks A.

$$[A][B] \neq [B][A] \quad (1.11)$$

2. Dua matriks A dan matriks B hanya dapat dikalikan dengan cara $[A][B]$ apabila jumlah kolom matriks $[A]$ sama dengan jumlah baris matriks $[B]$. Adapun matriks hasil perkaliannya mempunyai jumlah baris matriks $[A]$, dan jumlah kolom sama dengan jumlah kolom matriks $[B]$.

Contoh :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

$$[B] \times [A] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{bmatrix}$$

$$[A] \times [B] = [C] \quad , \quad p \text{ harus sama dengan } q \quad (1.12)$$

$$(m \times p) \quad (q \times r) \quad (m \times r)$$

$$[A] \times [B] \times [C] = [D] \quad (1.13)$$

$$(m \times p) \quad (q \times r) \quad (s \times n) \quad (m \times n)$$

$$\text{syarat : } p = q$$

$$\text{syarat : } r = s$$

Pada perkalian 3 buah matriks seperti di atas dapat di lakukan dengan mengalikan [A] dan [B] terlebih dulu, kemudian hasilnya dikalikan dengan [C]. Atau [B] dikalikan terlebih dahulu dengan [C], kemudian matriks [A] dikalikan dengan matriks hasil kali perkalian [B] dan [C].

Contoh :

$$[A] + [B] = [A] + [B] \quad (1.14)$$

1.3.4. Transpose matriks

Misal terdapat dua buah matriks $[C]$ dan $[D]$ seperti di bawah ini :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } [D] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks $[D]$ dapat diperoleh dengan cara menukar baris dan kolom matriks $[C]$. Dalam hal ini matriks $[D]$ dikatakan transpose matriks $[C]$ dan dituliskan sebagai :

$$[D] = [C]^T \quad (1.15)$$

Beberapa syarat transpose matriks :

1. Bila suatu matriks di transpose dua kali, maka akan diperoleh matriks semula, yaitu :

$$([A]^T)^T = [A] \quad (1.16)$$

2. Bila transpose dari dua matriks yang dijumlahkan hasilnya sama dengan transpose hasil penjumlahan kedua matriksnya.

$$[A]^T + [B]^T = ([A] + [B])^T \quad (1.17)$$

3. Transpose dari suatu perkalian matriks sama dengan perkalian dari transpose masing-masing matriks tetapi dengan urutan terbalik.

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T \quad (1.18)$$

4. Transpose dari suatu matriks simetri adalah matriks itu sendiri. Jika matriks $[A]$ simetri, maka :